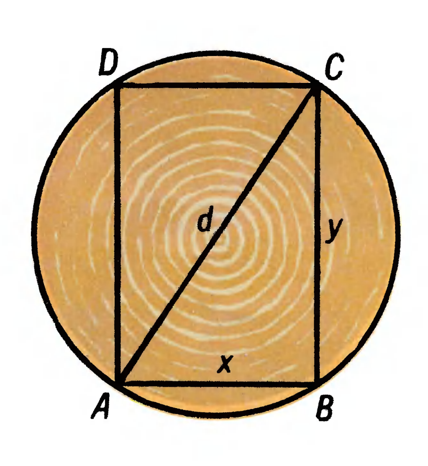
Lecciones populares de matemáticas

DESIGUALDADES

P. P. Korovkin



Editorial MIR



Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

П. П. КОРОВКИН

НЕРАВЕНСТВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

P. P. KOROVKIN

DESIGUALDADES

Traducido del ruso por
CARLOS VEGA
Candidato a Doctor
en Ciencias físico-matemáticas,
Catedrático de Matemáticas superiores

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

IMPRESO EN LA URSS. EDITORIAL MIR. 1976

На испанском языке

ÍNDICE

PREFACIO

En el curso escolar de las Matemáticas, el alumno estudia las propiedades de las desigualdades y los métodos que se emplean para resolverlas en los casos más sencillos (desigualdades de primero y de segundo órdenes).

En este libro el autor no se traza como meta exponer las propiedades principales de las desiguldades; sólo pretende dar a conocer a los alumnos de los grados superiores de la enseñanza media algunas desigualdades notables que desempeñan un papel importante en distintos capítulos de las Matemáticas Superiores y explicar cómo se aplican a la determinación de los valores máximos y mínimos de ciertas magnitudes y al cálculo de algunos límites.

El libro contiene 63 problemas; 35 de ellos, acompañados de su solución detallada, constituyen el contenido fundamental del libro; los 28 problemas restantes, insertados con otro tipo de letra al final del § 1 del capítulo 1 y de los §§ 1, 3 y 4 del capítulo II, aparecen en forma de ejercicios. El lector podrá encontrar las soluciones de los ejercicios al final del libro.

Sin duda, para el alumno es más útil resolver unos cuantos problemas difíciles que una gran cantidad de problemas sencillos.

Por eso recomendamos que se recurra a las respuestas sólo después de haber encontrado una solución propia, la cual puede diferir (¡sería magnífico!) de la que propone el autor.

Tanto al demostrar las desigualdades como al resolver los problemas, el autor se ha basado exclusivamente en las propiedades de las desigualdades y de los límites estudiados en el noveno grado de la enseñanza media.

El folleto, por su contenido, puede servir de base para un curso facultativo en los grados superiores de la enseñanza media.

P. Korovkin

CAPÍTULO I.

DESIGUALDADES

La importancia de las desigualdades se debe a que éstas se aplican en diferentes problemas de la Ciencia y de la Técnica.

La razón de ello estriba en que sólo podemos encontrar los valores aproximados, y no exactos, de las magnitudes que se determinan en uno u otro problema práctico (como, por ejemplo, la distancia a la Luna, la velocidad de la Luna, etc.). Si x es el valor encontrado y Δx es el error de medición, el valor exacto y de la magnitud verifica las desigualdades

$$x - |\Delta x| \leqslant y \leqslant x + |\Delta x|.$$

Al resolver problemas prácticos, es preciso tomar en consideración todos los errores de medición. Es más, a medida que se perfecciona la técnica y se hacen más complejos los problemas, debemos perfeccionar la propia técnica de medición de magnitudes. Los grandes errores en las mediciones resultan inadmisibles cuando se trata de la solución de problemas técnicos complejos (el arribo de un aparato cósmico a un lugar determinado de la Luna, de una nave cósmica a Venus, etc.).

§ 1. Parte entera del número

La parte entera del número x (designada por $[x]$) es el mayor número entero que no sobrepasa x.

De esta definición resulta que siempre $[x] \leqslant x$, pues la parte entera no sobrepasa x. Por otro lado, como $[x]$ es el mayor número entero que cumple esta desigualdad, tenemos que $[x] + 1 > x$.

Por lo tanto, $[x]$ es el número entero que cumple las desigualdades

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

Por ejemplo, de las desigualdades

$$3 < \pi < 4, \quad 5 < \frac{17}{3} < 6, \quad -2 < -\sqrt{2} < -1, \quad 5 = 5 < 6$$

resulta que

$$[\pi]=3, \quad \left[\frac{17}{3}\right]=5, \quad [-\sqrt{2}]=-2, \quad [5]=5.$$

En los cálculos aproximados es muy importante saber determinar la parte entera de una magnitud. En efecto, si conocemos la parte entera de una magnitud x, podemos tomar $[x]$ ó $[x]+1$ como valor aproximado de la magnitud x cometiendo un error que no pasa de la unidad, pues

$$0 \leqslant x-[x]<[x]+1-[x]=1,$$
$$0<[x]+1-x \leqslant [x]+1-[x]=1.$$

Es más, el hecho de conocer la parte entera de una magnitud permite hallar fácilmente su valor con un error que no pasa de $\frac{1}{2}$. Ese valor puede tomarse igual a $[x]+\frac{1}{2}$.

Señalemos por último que conociendo la parte entera de un número podemos determinar éste con cualquier grado de exactitud. Efectivamente, puesto que

$$[Nx] \leqslant Nx \leqslant [Nx]+1,$$

tenemos

$$\frac{[Nx]}{N} \leqslant x \leqslant \frac{[Nx]}{N}+\frac{1}{N}.$$

Es decir, el número

$$\frac{[Nx]}{N}+\frac{1}{2N}$$

difiere del número x en $\frac{1}{2N}$ todo lo más. Si N es grande, el error será pequeño.

En los problemas que siguen se determina la parte entera de algunos números.

Problema 1. Hallar la parte entera del número

$$x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Solución. Emplearemos las desigualdades

$$1 \leqslant 1 \leqslant 1,$$

$$0{,}7<\sqrt{\frac{1}{2}}<0{,}8,$$

$$0{,}5 < \sqrt{\frac{1}{3}} < 0{,}6,$$

$$0{,}5 \leqslant \sqrt{\frac{1}{4}} \leqslant 0{,}5$$

$$0{,}4 < \sqrt{\frac{1}{5}} < 0{,}5$$

(que se obtienen calculando las raíces, por defecto y por exceso, en menos de 0,1). Sumando estas desigualdades, encontramos

$$1 + 0{,}7 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}4 < x < 1 + 0{,}8 + 0{,}6 + 0{,}5, + 0{,}5,$$

o sea, $3{,}1 < x < 3{,}4$ y, por consiguiente, $[x] = 3$.

Notemos, en relación con este ejemplo, que el número 3,25 difiere de x en 0,15 todo lo más.

Ejemplo 2. Hallar la parte entera del número

$$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

Solución. La única diferencia entre este problema y el anterior es el número de sumandos: en el primero eran 5 y ahora son 1 000 000. Pero esta circunstancia hace imposible la aplicación práctica del método de solución anterior.

Para resolver el problema analicemos la suma

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Con este fin demostramos las desigualdades

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}. \qquad (1)$$

En efecto, puesto que

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

y puesto que

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n},$$

tenemos

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Hemos demostrado la primera de las desigualdades (1); la segunda se demuestra de un modo análogo.

Si en las desigualdades (1) tomamos $n = 2, 3, 4, \ldots$ $\ldots, n$, obtenemos

$$2\sqrt{3}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2,$$

$$2\sqrt{4}-2\sqrt{3}<\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2},$$

$$2\sqrt{5}-2\sqrt{4}<\frac{1}{\sqrt{4}}<2\sqrt{4}-2\sqrt{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

Sumemos ahora estas desigualdades:

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2.$$

Agregando 1 a todos los miembros de las desigualdades obtenidas encontramos

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1. \quad (2)$$

Puesto que $2\sqrt{2}<3$ y $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$, de las desigualdades (2) se deduce que

$$2\sqrt{n}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1. \quad (3)$$

Empleando las desigualdades (3) es fácil encontrar ahora la parte entera del número

$$y=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

En efecto, si en las desigualdades (3) tomamos $n = 1\,000\,000$, tendremos

$$2\sqrt{1\,000\,000}-2<$$
$$<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}<2\sqrt{1\,000\,000}-1,$$

o sea,

$$1998 < y < 1999.$$

Por consiguiente, $[y] = 1998$.

De las desigualdades (2) se deduce que el número 1998,6 difiere de y en 0,4 todo lo más. Por lo tanto, hemos calculado el número y en menos del $\frac{40}{1998{,}4}\% = 0{,}02\%$. Los números 1998 y 1999 difieren del número y a lo sumo en la unidad y el número 1998,5 en 0,5 todo lo más.

Analicemos ahora un problema de otra índole.

Problema 3. Demostrar la desigualdad

$$x = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Solución. Pongamos

$$y = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{100}{101}.$$

Puesto que

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4} < \frac{4}{5},\quad \frac{5}{6} < \frac{6}{7},\quad \ldots,\quad \frac{99}{100} < \frac{100}{101},$$

resulta que $x < y$ y, por consiguiente,

$$x^2 < xy = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101} = \frac{1}{101}.$$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros de esta desigualdad, encontramos

$$x < \frac{1}{\sqrt{101}} < 0{,}1.$$

Ejercicios

1. Demostrar las desigualdades

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{m-1}.$$

2. Demostrar las desigualdades

$$1800 < \frac{1}{\sqrt{10\,000}} + \frac{1}{\sqrt{10\,001}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} < 1800{,}02.$$

3. Hallar $[50z]$ si

$$z = \frac{1}{\sqrt{10\,000}} + \frac{1}{\sqrt{10\,001}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

Respuesta. $[50z] = 90\,000$.

4. Aplicando la inducción matemática, demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

5. Demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{12}.$$

§ 2. Media aritmética y media geométrica

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos, los números

$$a=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

$$g=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

formados a base de ellos, se denominan, respectivamente, *media aritmética* y *media geométrica* de los números x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Para estos dos números O. Cauchy, matemático francés, demostró a principios del siglo pasado la desigualdad

$$g\leqslant a$$

que se aplica frecuentemente en la solución de problemas. Demostraremos esta desigualdad exponiendo previamente una proposición auxiliar.

Teorema 1. *Si el producto de* n *números positivos* x_1, $x_2, \ldots, x_n$ *es igual a* 1, *la suma de los mismos no es menor que* n:

$$x_1x_2\ldots x_n=1\Rightarrow x_1+x_2+\ldots+x_n\geqslant n.$$

Demostración. Emplearemos el método de inducción matemática [1]). Comprobaremos primero que el teorema es válido para $n=2$, o sea, demostraremos que

$$x_1x_2=1\Rightarrow x_1+x_2\geqslant 2.$$

Con este fin consideremos por separado dos casos:

1) $x_1=x_2=1$.

En este caso tenemos $x_1+x_2=2$ y el teorema queda demostrado.

[1]) Una exposición detallada del método de inducción matemática puede verse en el libro de *I. S. Sominski* «Método de la inducción matemática» (Editorial MIR, 1975).

2) $0 < x_1 < x_2$.

En este caso tenemos $x_1 < 1$, y $x_2 > 1$ puesto que el producto es igual a 1. De la igualdad

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) = x_2 + x_1 - x_1x_2 - 1$$

se deduce que

$$x_1 + x_2 = x_1x_2 + 1 + (1 - x_1)(x_2 - 1). \qquad (4)$$

La igualdad (4) ha sido establecida sin imponer condición alguna a los números x_1 y x_2. Teniendo en cuenta ahora que $x_1x_2 = 1$, obtenemos

$$x_1 + x_2 = 2 + (1 - x_1)(x_2 - 1).$$

Finalmente, puesto que $x_1 < 1 < x_2$, el último número resulta positivo y por eso $x_1 + x_2 > 2$. O sea, el teorema queda demostrado para $n = 2$. Notemos que la igualdad

$$x_1 + x_2 = 2$$

se cumple sólo si $x_1 = x_2$. En cambio, para $x_1 \neq x_2$ se tiene

$$x_1 + x_2 > 2.$$

Basándonos en el método de inducción matemática, supondremos ahora que el teorema es válido para $n = k$, es decir, supondremos que la desigualdad

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k \geqslant k$$

tiene lugar si $x_1x_2x_3 \ldots x_k = 1$, y demostraremos el teorema para $n = k + 1$, o sea, demostraremos que

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geqslant k + 1$$

si $x_1x_2x_3 \ldots x_kx_{k+1} = 1$, donde $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, … …, $x_k > 0$, $x_{k+1} > 0$.

Notemos ante todo que siendo

$$x_1x_2x_3 \ldots x_kx_{k+1} = 1,$$

se pueden presentar dos casos:

1) todos los factores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1}$ son iguales, o sea,

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_k = x_{k+1};$$

2) no todos los factores son iguales.

En el primer caso todos los factores son iguales a la unidad y la suma de los mismos es igual a $k + 1$, o sea,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + x_{k+1} = k + 1.$$

En el segundo caso, entre los factores del producto $x_1x_2 \ldots x_kx_{k+1}$ habrán números mayores y menores que uno (si todos los factores fuesen menores que uno, el producto sería también menor que uno).

Sea, por ejemplo, $x_1 < 1$ y $x_{k+1} > 1$. Tenemos

$$(x_1x_{k+1})\, x_2x_3 \ldots x_k = 1.$$

Poniendo $y_1 = x_1x_{k+1}$, obtenemos

$$y_1x_2x_3 \ldots x_k = 1.$$

Puesto que aquí el producto de k números positivos es igual a la unidad, resulta (por hipótesis) que la suma de los mismos no es menor que k, o sea,

$$y_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k \geqslant k.$$

Pero

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + x_{k+1} =$$
$$= (y_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1 \geqslant$$
$$\geqslant k + x_{k+1} - y_1 + x_1 = (k + 1) + x_{k+1} - y_1 + x_1 - 1.$$

Recordando que $y_1 = x_1x_{k+1}$, obtenemos

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geqslant$$
$$\geqslant (k + 1) + x_{k+1} - x_1x_{k+1} + x_1 - 1 =$$
$$= (k + 1) + (x_{k+1} - 1)\,(1 - x_1).$$

Puesto que $x_1 < 1$ y $x_{k+1} > 1$, tenemos $(x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > 0$, y, por consiguiente,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_k + x_{k+1} \geqslant$$
$$\geqslant (k + 1) + (x_{k+1} - 1)\,(1 - x_1) > k + 1.$$

Con esto queda demostrado el teorema 1.

Problema 1. Demostrar que si $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son números positivos, se tiene

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$$

con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar sólo si

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n.$$

Solución. Puesto que

$$\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\ldots\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{x_n}{x_1}=1,$$

la desigualdad se deduce del teorema 1. El signo de igualdad tiene lugar sólo si

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\ldots=\frac{x_{n-1}}{x_n}=\frac{x_n}{x_1}=1,$$

o sea, sólo si $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n$.

Problema 2. Demostrar la desigualdad

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2.$$

Solución. Tenemos

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Puesto que el producto de los sumandos del último miembro es igual a la unidad, la suma de los mismos no es menor que dos. El signo de igualdad tiene lugar sólo para $x=0$.

Problema 3. Demostrar que para $a>1$ se tiene

$$\lg a+\log_a 10\geqslant 2.$$

Solución. Puesto que $\log_a 10\cdot\lg a=1$, tenemos

$$\lg a+\log_a 10=\lg a+\frac{1}{\lg a}\geqslant 2.$$

Problema 4. Demostrar la desigualdad

$$\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Solución. Dividamos entre x^2 el numerador y el denominador del primer miembro de la desigualdad:

$$\frac{x^2}{1+x^4}=\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2}.$$

Puesto que $\frac{1}{x^2}\cdot x^2=1$, tenemos $\frac{1}{x^2}+x^2\geqslant 2$, y, por consiguiente,

$$\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Pasemos ahora a demostrar la afirmación enunciada al principio del parágrafo.

Teorema 2. *La media geométrica de números positivos no pasa de la media aritmética de estos mismos números.*

Si los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *no son todos iguales, la media geométrica de estos números es menor que su media aritmética.*

Demostración. De la igualdad $g=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ se deduce que

$$1=\sqrt[n]{\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}\ldots\frac{x_n}{g}}, \text{ o sea, } \frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}\ldots\frac{x_n}{g}=1.$$

Debido a que el producto de n números positivos es igual a 1, resulta (por el teorema 1) que la suma de los mismos no es menor que n, es decir,

$$\frac{x_1}{g}+\frac{x_2}{g}+\ldots+\frac{x_n}{g}\geqslant n.$$

Multiplicando por g y dividiendo entre n ambos miembros de la última desigualdad, obtenemos

$$a=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant g.$$

Notemos que la igualdad tiene lugar sólo cuando

$$\frac{x_1}{g}=\frac{x_2}{g}=\ldots=\frac{x_n}{g}=1, \text{ o sea, } x_1=x_2=\ldots=x_n=g.$$

Por el contrario, si los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no son todos iguales, se tiene

$$a>g.$$

Problema 5. Entre todos los paralelepípedos con la suma fija de sus tres aristas recíprocamente perpendiculares, hallar el paralelepípedo de volumen máximo.

Solución. Sea $m=a+b+c$ la suma de las aristas y sea $V=abc$ el volumen del paralelepípedo. Puesto que

$$\sqrt[3]{V}=\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}=\frac{m}{3},$$

tenemos $V\leqslant\frac{m^3}{27}$. El signo de igualdad tiene lugar sólo si $a=b=c=\frac{m}{3}$, o sea, si el paralelepípedo es un cubo.

Problema 6. Demostrar la desigualdad

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n \geqslant 2. \tag{5}$$

Solución. Empleando el teorema 2, tenemos

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} < \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{(n+1)\,n}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

Elevando a la n-ésima potencia ambos miembros de la última desigualdad, obtendremos la desigualdad (5).

Definición. El número

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

se denomina *media potencial* de grado α de los números a_1, a_2, . . ., a_n. En particular, el número

$$c_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

es la media aritmética de los números a_1, a_2, . . ., a_n; el número

$$c_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

se denomina *media cuadrática*, y el número

$$c_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}$$

se denomina *media armónica* de los números a_1, a_2, . . ., a_n.

Problema 7. Demostrar que si a_1, a_2, . . ., a_n son números positivos y si $\alpha < 0 < \beta$, se tiene

$$c_\alpha \leqslant g \leqslant c_\beta, \tag{6}$$

o sea, que la media potencial de grado negativo no pasa de la media geométrica y que la media potencial de grado positivo no es menor que la media geométrica.

Solución. Debido a que la media geométrica de números positivos no pasa de la media aritmética, tenemos

$$\sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha \ldots a_n^\alpha} \leqslant \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}.$$

Elevando ambos miembros de la última desigualdad a la potencia $\frac{1}{\alpha}$ y tomando en consideración que $\frac{1}{\alpha} < 0$, obtenemos

$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = c_\alpha.$$

Con esto queda demostrada la primera de las desigualdades (6); la segunda se demuestra análogamente.

De la desigualdad (6) se deduce, en particular, que la media armónica c_{-1} no pasa de la media aritmética c_1.

Problema 8. Demostrar que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos, se tiene

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right) \geqslant n^2.$$

Solución. Puesto que $c_{-1} \leqslant g \leqslant c_1$, tenemos

$$c_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = c_1.$$

De esta desigualdad se deduce que

$$n^2 \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Problema 9. Demostrar la desigualdad

$$n a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n, \tag{7}$$

donde $a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0$.

Solución. Puesto que la media geométrica no pasa de la media aritmética, tenemos

$$a_1 a_2 \ldots a_n = \sqrt[n]{a_1^n a_2^n \ldots a_n^n} \leqslant \frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}{n}.$$

Multiplicando por n ambos miembros de esta desigualdad, obtenemos la desigualdad (7).

De la desigualdad (7) se deduce que

$$2a_1 a_2 \leqslant a_1^2 + a_2^2, \quad 3a_1 a_2 a_3 \leqslant a_1^3 + a_2^3 + a_3^3,$$

$$4a_1 a_2 a_3 a_4 \leqslant a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4,$$

o sea, *el producto duplicado de dos números positivos no pasa de la suma de sus cuadrados, el producto triplicado de tres números no pasa de la suma de sus cubos*, etc.

§ 3. El número *e*

El número e desempeña un papel importante en las Matemáticas. Daremos su definición después de resolver una serie de problemas en los que se aplica solamente el teorema 2.

Problema 1. Demostrar que cualesquiera que sean los números positivos a y b $(a \neq b)$ es válida la desigualdad

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+nb}{n+1}.$$

Solución. Tenemos

$$\sqrt[n+1]{ab^n} = \sqrt[n+1]{a\underbrace{bb\ldots b}_{n}} < \frac{a+\overbrace{b+b+\ldots+b}^{n}}{n+1} = \frac{a+nb}{n+1}$$

que es lo que se quería demostrar.

Problema 2. Demostrar que a medida que aumenta n también aumentan las magnitudes

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{y} \quad z_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n,$$

o sea, que

$$x_n < x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{y} \quad z_n < z_{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Solución. Tomando $a = 1$ y $b = 1+\frac{1}{n}$ en la desigualdad del problema anterior, encontramos

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Elevando ambos miembros de esta desigualdad a la potencia $(n+1)$ tendremos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \text{ o sea, } x_n < x_{n+1}.$$

La segunda desigualdad se demuestra análogamente.

Problema 3. Demostrar que

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

decrece a medida que aumenta n, o sea,

$$y_n > y_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Solución. Tenemos

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{z_{n+1}}$$

(véanse las designaciones del problema 2). Como z_n aumenta a medida que aumenta n, resulta que y_n decrece.

En los problemas 2 y 3 hemos demostrado que

$$x_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 < x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= 2{,}25 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots,$$

$$y_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4 > y_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 =$$

$$= 3{,}375 > y_3 > \ldots > y_n > \ldots .$$

Por otra parte,

$$2 = x_1 < x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n < y_1 = 4.$$

Luego, la variable x_n satisface dos condiciones:

1) x_n crece monótonamente a medida que aumenta n;
2) x_n es una variable acotada ($2 < x_n < 4$).

Es conocido que toda variable acotada y monótona creciente tiene límite. Por lo tanto, existe el límite de la variable x_n. Este límite se designa por la letra e, o sea,

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Como quiera que la variable x_n tiende a su límite aumentando, resulta que x_n es menor que su límite, o sea,

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e. \tag{8}$$

Es fácil ver que $e < 3$. En efecto, si n es grande, tenemos

$$x_n < y_n < y_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = 2{,}985984.$$

Por lo tanto, también

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant 2{,}985984 < 3.$$

El número e, al igual que el número π, desempeña un papel importante en las Matemáticas. Se emplea, por ejemplo, como base de logaritmos denominados *logaritmos naturales.* El logaritmo del número N respecto a la base e se representa simbólicamente por $\ln N$ (y se lee así: logaritmo natural de N).

Se sabe que los números e y π son irracionales. Cada uno ha sido ya calculado con 808 signos decimales; se tiene

$$e = 2{,}7182818285490\ldots$$

Demostremos ahora que el límite de la variable y_n es también igual a e. En efecto,

$$\lim y_n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Puesto que y_n decrece a medida que se aproxima a e (véase el problema 2), resulta que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e. \tag{9}$$

Problema 4. Demostrar la desigualdad

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^{n}. \tag{10}$$

Solución. Demostraremos la desigualdad (10) aplicando el método de inducción matemática. Es fácil comprobarla para $n = 1$. En efecto,

$$1! = 1 > \left(\frac{1}{e}\right)^{1}.$$

Supongamos que la desigualdad (10) se cumple para $n = k$, o sea,

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^{k}.$$

Multiplicando por $k+1$ ambos miembros de esta última desigualdad, obtenemos

$$(k+1)\,k! = (k+1)! > \left(\frac{k}{e}\right)^{k}(k+1) = \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}}.$$

Pero, según la desigualdad (8), tenemos $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e$ y, por eso,

$$(k+1)! > \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \frac{e}{e} = \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1},$$

es decir, hemos demostrado la desigualdad (9) para $n = k + 1$. Con esto, la desigualdad (9) queda demostrada para cualesquiera valores de n.

Puesto que $e < 3$, de la desigualdad (9) se deduce que

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Empleando la última desigualdad es fácil demostrar que

$$300! > 100^{300}.$$

En efecto, tomando $n = 300$, obtenemos

$$300! > \left(\frac{300}{3}\right)^{300} = 100^{300}.$$

De la misma forma que ha sido demostrada la desigualdad del problema 4, se puede demostrar esta otra

$$n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

§ 4. Desigualdad de Bernoulli

En este parágrafo demostraremos, apoyándonos en el teorema 2, la desigualdad de Bernoulli que tiene interés por sí sola y se aplica frecuentemente en la solución de problemas.

Teorema 3. *Si* $x \geqslant -1$ *y* $0 < \alpha < 1$, *entonces*

$$(1 + x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x. \qquad (11)$$

En cambio, si $\alpha < 0$ *ó* $\alpha > 1$, *se tiene*

$$(1 + x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x. \qquad (12)$$

El signo de igualdad en (11) *y* (12) *se cumple sólo para* $x = 0$.

Demostración. Supongamos que α es un número racional con la particularidad de que $0 < \alpha < 1$. Sea $\alpha = \frac{m}{n}$, donde m y n son números enteros positivos y $1 \leqslant m < n$. Debido

a que $1 + x > 0$ por hipótesis, tenemos

$$(1+x)^{\alpha} = (1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-m}} =$$
$$= \sqrt[n]{\underbrace{(1+x)(1+x)\ldots(1+x)}_{m} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ \ldots \cdot 1}_{n-m}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(1+x)+(1+x)+\ldots+(1+x)+1+1+\ldots+1}{n} =$$
$$= \frac{m(1+x)+n-m}{n} = \frac{n+mx}{n} = 1 + \frac{m}{n}x = 1 + \alpha x.$$

El signo de igualdad tiene lugar sólo si todos los factores que figuran debajo del radical son iguales, o sea, si $1 + x = 1$, $x = 0$. En cambio, si $x \neq 0$, tenemos

$$(1 + x)^{\alpha} < 1 + \alpha x.$$

Es decir, hemos demostrado la primera parte del teorema para el caso en el que α es un número racional.

Supongamos ahora que α, $0 < \alpha < 1$, es un número irracional. Sea $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ una sucesión de números racionales que tiene α como límite con la particularidad de que $0 < r_n < 1$. De las desigualdades

$$(1+x)^{r_n} \leqslant 1 + r_n x, \quad x \geqslant -1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

demostradas ya para el caso en el que el exponente es un número racional, se deduce que

$$(1+x)^{\alpha} = \lim_{r_n \to \alpha} (1+x)^{r_n} \leqslant \lim_{r_n \to \alpha} (1 + r_n x) = 1 + \alpha x.$$

Con esto la desigualdad (11) queda demostrada también para los valores irracionales de α. Resta demostrar que para valores irracionales de α, siendo $0 < \alpha < 1$, y $x \neq 0$, se tiene

$$(1 + x)^{\alpha} < 1 + \alpha x,$$

o sea, que el signo de igualdad no tiene lugar en (11) si $x \neq 0$. Con este fin tomemos un número racional r tal que $\alpha < r < 1$. Es evidente que

$$(1+x)^{\alpha} = \left[(1+x)^{\frac{\alpha}{r}}\right]^{r}.$$

Puesto que $0 < \frac{\alpha}{r} < 1$, resulta, según hemos demostrado, que

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{r}} \leqslant 1 + \frac{\alpha}{r} x.$$

Por consiguiente,

$$(1+x)^{\alpha} \leqslant \left(1+\frac{\alpha}{r} x\right)^{r}.$$

Si $x \neq 0$, tenemos $\left(1+\frac{\alpha}{r} x\right)^{r} < 1 + r\frac{\alpha}{r}x = 1 + \alpha x$, o sea,

$$(1 + x)^{\alpha} < 1 + \alpha x.$$

Con esto queda demostrada por completo la primera parte del teorema.

Pasamos a la demostración de la segunda parte del teorema.

Si $1 + \alpha x < 0$, la desigualdad (12) es evidente, pues su primer miembro no es negativo mientras que el segundo es negativo.

Si $1 + \alpha x \geqslant 0$, o sea, $\alpha x \geqslant -1$, consideraremos por separado cada uno de los casos.

Sea $\alpha > 1$; entonces, según la primera parte del teorema, ya demostrada, tenemos

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha} \alpha x = 1 + x$$

con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar sólo si $x = 0$. Elevando a la potencia α ambos miembros de la última desigualdad, obtenemos

$$1 + \alpha x \leqslant (1+x)^{\alpha}.$$

Sea ahora $\alpha < 0$. Si $1 + \alpha x < 0$, la desigualdad (12) se hace evidente. Si $1 + \alpha x \geqslant 0$, tomemos un número entero positivo n de modo que se cumpla la desigualdad $-\frac{\alpha}{n} < 1$. En virtud de la primera parte del teorema, tenemos

$$(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n} x,$$

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \geqslant \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n} x} \geqslant 1 + \frac{\alpha}{n} x$$

$\left(\text{la última desigualdad es válida porque } 1 \geqslant 1 - \frac{\alpha^2}{n^2} x^2\right)$.
Elevando a la n-ésima potencia ambos miembros de la última desigualdad, obtenemos

$$(1+x)^{\alpha} \geqslant \left(1+\frac{\alpha}{n} x\right)^{n} \geqslant 1+n \frac{\alpha}{n} x = 1+\alpha x.$$

Notemos que la igualdad puede darse sólo en el caso $x = 0$. Con esto queda demostrado completamente el teorema.

Problema 1. Demostrar que para $0 > \alpha > -1$ se tiene

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \qquad (13)$$

Solución. Puesto que $0 < \alpha+1 < 1$, tenemos en virtud de la desigualdad (11)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1+\frac{\alpha+1}{n},$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1-\frac{\alpha+1}{n}.$$

Multiplicando estas desigualdades por $n^{\alpha+1}$, obtenemos

$$(n+1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} + (\alpha+1) n^{\alpha},$$

$$(n-1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} - (\alpha+1) n^{\alpha},$$

de donde es fácil deducir las desigualdades (13).

Problema 2. Demostrar que para $0 > \alpha > -1$, se tiene

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1} < m^{\alpha}+(m+1)^{\alpha}+\ldots+n^{\alpha} <$$

$$< \frac{n^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \qquad (14)$$

Solución. Tomando en las desigualdades (13) $n=m$, $m+1, \ldots, n$, obtenemos

$$\frac{(m+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1} < m^{\alpha} < \frac{m^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

$$\frac{(m+2)^{\alpha+1}-(m+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} < (m+1)^{\alpha} < \frac{(m+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

$$\frac{(m+3)^{\alpha+1}-(m+2)^{\alpha+1}}{\alpha+1} < (m+2)^{\alpha} < \frac{(m+2)^{\alpha+1}-(m+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

. . . .

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Sumando estas desigualdades, obtenemos (14).

Problema 3. Hallar la parte entera del número

$$x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}.$$

Solución. Tomando en (14) $m=4$, $n=1\,000\,000$ y $\alpha=-\frac{1}{3}$, obtenemos

$$\frac{1\,000\,001^{\frac{2}{3}}-4^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}<x<\frac{1\,000\,000^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}},$$

o sea,

$$\frac{3}{2}\cdot 1\,000\,001^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}\cdot 4^{\frac{2}{3}}<x<\frac{3}{2}\cdot 1\,000\,000^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}\cdot 3^{\frac{2}{3}}.$$

Puesto que

$$\frac{3}{2}\cdot 1\,000\,001^{\frac{2}{3}}>\frac{3}{2}\cdot 1\,000\,000^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\cdot 10\,000=15\,000,$$

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{54}<4,\ \frac{3}{2}\sqrt[3]{9}>\frac{3}{2}\sqrt[3]{8}=3,$$

tenemos

$15\,000-4<x<15\,000-3$, o sea, $14\,996<x<14\,997$.

De estas desigualdades resulta que $[x]=14\,996$.

§ 5. Medias potenciales

Ya en el § 2 antes de ver el problema 7 hemos señalado que el número

$$c_\alpha=\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

se denomina media potencial de grado α de los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Al mismo tiempo hemos demostrado (problema 7) que $c_\alpha\leqslant c_\beta$, si $\alpha<0<\beta$.

Ahora demostraremos que la desigualdad

$$c_\alpha\leqslant c_\beta$$

es válida siempre que $\alpha<\beta$. En otras palabras, la media potencial de grado α crece monótonamente a medida que aumenta α.

Teorema 4. *Si* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *son números positivos y* $\alpha < \beta$, *se tiene* $c_\alpha \leqslant c_\beta$ *con la particularidad de que* $c_\alpha = c_\beta$ *sólo si*

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n.$$

Demostración. El teorema 4 ha sido ya demostrado para el caso en el que los números α y β tienen signos opuestos (véase el problema 7 del § 2 y la definición que le precede). Resta demostrar el teorema para α y β del mismo signo.

Supongamos que $0 < \alpha < \beta$ y pongamos

$$k = c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Dividiendo c_β entre k, encontramos

$$\frac{c_\beta}{k} = \frac{c_\beta}{c_\alpha} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\beta + \ldots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Tomando ahora

$$d_1 = \left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha, \quad d_2 = \left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha, \ldots, \quad d_n = \left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha$$

obtenemos

$$\frac{c_\beta}{k} = \left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{15}$$

Puesto que

$$\left(\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha + \ldots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{k} c_\alpha = \frac{1}{c_\alpha} c_\alpha = 1,$$

resulta

$$\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n} = 1, \text{ o sea, } d_1 + d_2 + \ldots + d_n = n.$$

Pongamos

$$d_1 = 1 + x_1, \quad d_2 = 1 + x_2, \ldots, \quad d_n = 1 + x_n.$$

De la igualdad $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = n$ se deduce que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0.$$

En virtud del teorema 3 $\left(\text{notemos que } \frac{\beta}{\alpha} > 1\right)$, tenemos

$$\left.\begin{array}{l} d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1+x_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_1, \\ d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1+x_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_n^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1+x_n)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_n. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Sumando estas desigualdades, obtenemos

$$d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant n + \frac{\beta}{\alpha}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = n. \quad (16)$$

De (15) y (16) se deduce que

$$\frac{c_\beta}{k} \geqslant \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = 1, \qquad \text{o sea, } c_\beta \geqslant k = c_\alpha.$$

Notemos que $c_\beta = k = c_\alpha$ sólo si en todas las desigualdades (*) tiene lugar el signo de igualdad, es decir, si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (teorema 3). En este caso, se tiene $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 1$ y, por consiguiente, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = k$. En cambio, si los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no son iguales, se tiene

$$c_\beta > c_\alpha.$$

Con esto el teorema 4 queda demostrado para el caso en el que $0 < \alpha < \beta$.

Si $\alpha < \beta < 0$, tenemos $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$. Repitiendo los razonamientos anteriores, obtendremos en (*) y (16) signos de desigualdad opuestos. Pero como $\beta < 0$, de la desigualdad

$$\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n} \leqslant 1$$

se deduce que

$$\frac{c_\beta}{k}=\left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+d_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+\ldots+d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\geqslant 1^{\frac{1}{\beta}}=1,$$

es decir,

$$c_\beta\geqslant k=c_\alpha.$$

Con esto el teorema 4 queda demostrado completamente.

En lo que sigue la media geométrica será denominada *media potencial de grado cero*, o sea, se tomará $g=c_0$.

Notemos que el teorema 4 subsiste también en este caso ya que (problema 7 del § 2) $c_\alpha\leqslant g=c_0$ si $\alpha<0$ y $c_\beta\geqslant g=c_0$ si $\beta>0$.

Del teorema demostrado se deduce, en particular, que

$$c_{-1}\leqslant c_0\leqslant c_1\leqslant c_2,$$

es decir, la media armónica no pasa de la media geométrica, la media geométrica no sobrepasa la media aritmética, y la media aritmética no supera la media cuadrática de números positivos. Por ejemplo, si $a_1=1$, $a_2=2$ y $a_3=4$, se tiene

$$c_{-1}=\left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+a_3^{-1}}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{12}{7}=1{,}7\ldots,$$

$$c_0=\sqrt[3]{a_1a_2a_3}=\sqrt[3]{1\cdot2\cdot4}=2,$$

$$c_1=\frac{1+2+4}{3}=\frac{7}{3}=2{,}3\ldots,$$

$$c_2=\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1+4+16}{3}}=\sqrt{7}=2{,}6\ldots$$

y, por consiguiente,

$c_{-1}=1{,}7\ldots<2=c_0<2{,}3\ldots=c_1<2{,}6\ldots=c_2.$

Problema 1. Demostrar que $x^2+y^2+z^2\geqslant 12$ si $x+y+z=6$.

Solución. Puesto que la media aritmética no pasa de la media cuadrática, tenemos

$$\frac{x+y+z}{3}\leqslant\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

es decir,

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{3}.$$

En nuestro caso $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{6^2}{3} = 12$. El signo de igualdad tiene lugar sólo si $x = y = z = 2$.

Problema 2. Demostrar que siendo x, y y z números positivos y $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, se tiene

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 16 \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Solución. Debido a que $c_2 \leqslant c_3$, tenemos

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

En nuestro caso resulta

$$\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant \sqrt{\frac{8}{3}},$$

es decir,

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3 \cdot \frac{8}{3} \sqrt{\frac{8}{3}} = 16 \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Problema 3. Demostrar que para los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se cumplen las desigualdades

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^\alpha \leqslant$$
$$\leqslant n^{\alpha-1}(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_n^\alpha), \quad \alpha \geqslant 1, \tag{17}$$
$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^\alpha \geqslant$$
$$\geqslant n^{\alpha-1}(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_n^\alpha), \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{18}$$

Solución. Si $\alpha > 1$, tenemos

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = c_1.$$

Es fácil deducir de aquí la desigualdad (17). De la misma forma se demuestra la desigualdad (18). En particular, de las desigualdades (17) y (18) resulta que

$$(x+y)^\alpha \leqslant 2^{\alpha-1}(x^\alpha+y^\alpha), \quad \alpha \geqslant 1, \quad x>0, \quad y>0,$$
$$(x+y)^\alpha \geqslant 2^{\alpha-1}(x^\alpha+y^\alpha), \quad 0<\alpha<1, \quad x>0, \quad y>0.$$

Problema 4. Demostrar que si $x^3 + y^3 + z^3 = 81$, $x > 0$, $y > 0$ y $z > 0$, se tiene

$$x + y + z \leqslant 9.$$

Solución. Puesto que

$$(x + y + z)^3 \leqslant 3^2 (x^3 + y^3 + z^3) = 9 \cdot 81 = 729$$

(según la desigualdad (17)), resulta

$$x + y + z \leqslant \sqrt[3]{729} = 9.$$

CAPÍTULO II.

APLICACIÓN DE DESIGUALDADES

En este capítulo explicaremos cómo se aplican las desigualdades a la determinación de los valores máximos y mínimos de funciones y al cálculo de los límites de algunas sucesiones. Además, deduciremos aquí algunas desigualdades importantes.

§ 1. Valores máximo y mínimo de una función

Numerosos problemas prácticos se reducen al estudio de una u otra función. Por ejemplo, sean x, y y z las dimensiones de caja con tapa (de un paralelepípedo); entonces, el área de su superficie es

$$S = 2xy + 2yz + 2zx$$

y su volumen es

$$V = xyz.$$

Si para la fabricación de una caja de volumen determinado se emplea un material costoso, es deseable, claro está, que la cantidad de material sea mínima, es decir, que el área de la superficie de la caja sea la menor posible. Este es un ejemplo sencillo en el que se trata de hallar el mínimo de una función de varias variables. Problemas semejantes se plantean muy a menudo y los matemáticos más destacados siempre prestan la debida atención al desarrollo de los métodos de solución de los mismos.

Aquí resolveremos varios problemas de este tipo basándonos en las desigualdades estudiadas en el primer capítulo [1]). Previamente demostraremos un teorema.

Teorema 5. *Si* $a > 0$, $\alpha > 1$ y $x \geqslant 0$, *la función*

$$x^\alpha - ax$$

[1]) Acerca de la aplicación de desigualdades de segundo grado a la determinación de los valores máximo y mínimo, puede verse el libro de *I. P. Natansón* «Problemas elementales sobre máximos y mínimos» (Editorial MIR, 1976).

alcanza su valor mínimo, igual a: $(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$, *en el punto* $x=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Demostración. La demostración es muy sencilla si $\alpha=2$. En efecto, puesto que

$$x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4},$$

la función toma su valor mínimo, igual a: $-\frac{a^2}{4}$, en el punto $x=\frac{a}{2}>0$.

Si $\alpha>1$ es arbitrario, para demostrar el teorema hay que recurrir a la desigualdad (12) del teorema 3. Puesto que $\alpha>1$, tenemos

$$(1+z)^\alpha \geqslant 1+\alpha z, \quad z\geqslant -1,$$

teniendo lugar la igualdad sólo para $z=0$. Tomando aquí $1+z=y$, encontramos

$$y^\alpha \geqslant 1+\alpha(y-1), \quad y^\alpha-\alpha y\geqslant 1-\alpha, \quad y\geqslant 0;$$

el signo de igualdad tiene lugar sólo para $y=1$. Multiplicando por c^α ambos miembros de la última desigualdad, obtenemos

$$(cy)^\alpha-\alpha c^{\alpha-1}(cy)\geqslant(1-\alpha)c^\alpha, \quad y\geqslant 0.$$

Poniendo

$$x=cy \quad \text{y} \quad \alpha c^{\alpha-1}=a, \quad c=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

tendremos

$$x^\alpha-ax\geqslant(1-\alpha)c^\alpha=(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

donde el signo de igualdad tiene lugar sólo para $x=c=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Es decir, la función

$$x^\alpha-ax, \quad \alpha>1, \quad a>0, \quad x\geqslant 0,$$

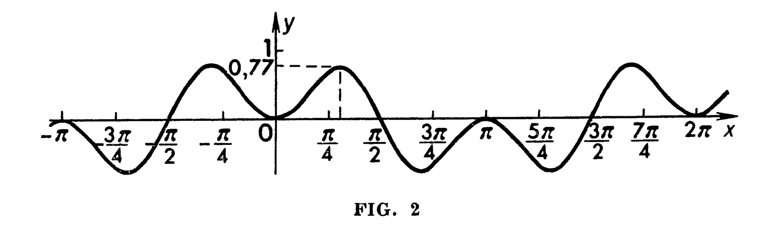


FIG. 2

Problema 3. Hallar el valor máximo de la función

$$y = \cos x \cos 2x.$$

Solución. La función $y = \cos x \cos 2x$ no es mayor que 1 porque los factores $\cos x$ y $\cos 2x$ no son mayores que 1.

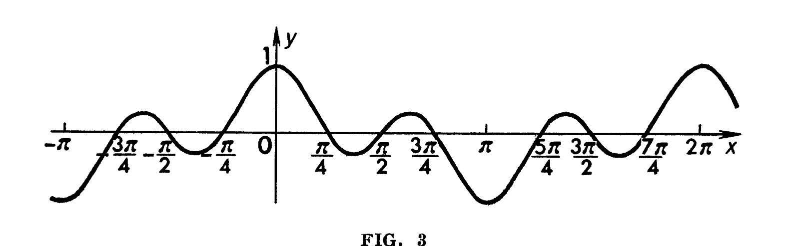


FIG. 3

Pero en los puntos $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots,$ tenemos

$$\cos x \cos 2x = 1.$$

Es decir, la función $y = \cos x \cos 2x$ alcanza su valor máximo, igual a 1, en los puntos $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ En la fig. 3 hemos representado la gráfica de la función $y = \cos x \cos 2x$.

Problema 4. Hallar el valor mínimo de la función

$$x^{\alpha} + ax,$$

donde $a > 0$, $\alpha < 0$ y $x \geqslant 0$.

Solución. Puesto que $\alpha < 0$, tenemos, según la desigualdad (12),

$$(1 + z)^{\alpha} \geqslant 1 + \alpha z,$$

donde el signo de igualdad tiene lugar sólo para $z = 0$. Tomando $1 + z = y$, $z = y - 1$, obtenemos

$$y^{\alpha} \geqslant 1 + \alpha (y - 1), \quad y \geqslant 0,$$

donde el signo de igualdad tiene lugar sólo para $y = 1$. De la última desigualdad se deduce que

$$y^{\alpha} - \alpha y \geqslant 1 - \alpha, \quad (cy)^{\alpha} - \alpha c^{\alpha-1} (cy) \geqslant (1 - \alpha) c^{\alpha}.$$

Poniendo $a = -\alpha c^{\alpha-1}$ y $x = cy$, encontramos

$x^{\alpha} + ax \geqslant (1 - \alpha) c^{\alpha} = (1 - \alpha) \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$, donde el signo de igualdad tiene lugar sólo para $x = c = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Es decir, la función $x^{\alpha} + ax$ alcanza su valor mínimo, igual a

$$(1 - \alpha) \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

en el punto $x = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Por ejemplo, la función

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 27x, \quad x \geqslant 0,$$

alcanza su valor mínimo en el punto

$$x = \left(\frac{27}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{-\frac{1}{3}-1}} = \frac{1}{27}.$$

Este valor es igual a

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{27}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}-1}} = 4.$$

Problema 5. Hallar las dimensiones óptimas[1]) de un recipiente de forma cilíndrica con fondo y tapa (de una lata de conserva).

Solución. Sea $V = \pi r^2 h$ el volumen del recipiente, donde r es el radio y h es la altura del cilindro. El área total de la superficie del recipiente es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Puesto que $h = \frac{V}{\pi r^2}$, tenemos

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Tomando $x = \frac{1}{r}$, encontramos

$$S = 2\pi x^{-2} + 2Vx = 2\pi \left(x^{-2} + \frac{V}{\pi} x\right).$$

Según el problema anterior, la función $x^{-2} + \frac{V}{\pi} x$ alcanza su valor mínimo para

$$x = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{-2-1}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}.$$

Volviendo a los símbolos iniciales, encontramos

$$\frac{1}{r} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}, \quad r^3 = \frac{V}{2\pi} = \frac{\pi r^2 h}{2\pi}, \quad r = \frac{h}{2}, \quad h = 2r = d.$$

Es decir, el recipiente tendrá dimensiones óptimas si su altura y diámetro son iguales.

Ejercicios

6. Hallar el valor máximo de la función $x(6-x)^2$ si $0 < x < 6$.
Sugerencia. Poner $y = 6 - x$.

7. De una lámina cuadrada de dimensión $2a$, se corta de cada esquina un cuadrado para que se pueda fabricar, doblando los salientes obtenidos, una caja sin tapa de capacidad máxima (fig. 4). ¿Cuál será la dimensión de los cuadrados recortados?

8. Hallar el valor mínimo de la función

$$x^6 + 8x^2 + 5.$$

[1]) Las dimensiones de un recipiente de un volumen dado se consideran óptimas si su fabricación requiere la cantidad mínima de material, o sea, si es mínima el área de la superficie del recipiente.

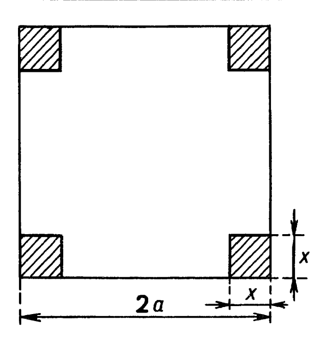
9. Hallar el valor mínimo de la función

$$x^6-8x^2+5.$$

10. Hallar el valor máximo de la función

$$x^{\alpha}-ax$$

si $0<\alpha<1$, $a>0$, y $x\geqslant 0$.



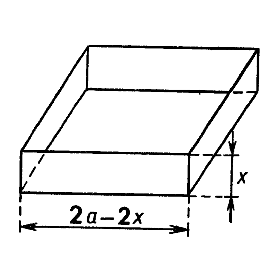


FIG. 4

11. Demostrar que para $x\geqslant 0$ es válida la desigualdad

$$\sqrt[4]{x}\leqslant\frac{3}{8}+2x.$$

12. Demostrar que para $n\geqslant 3$ es válida la disigualdad

$$\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}.$$

Sugerencia. Empléese la desigualdad (8).

13. Hallar el mayor de los números

$$1,\quad \sqrt{2},\quad \sqrt[3]{3},\quad \sqrt[4]{4},\quad \sqrt[5]{5},\ \ldots,\ \sqrt[n]{n},\ \ldots$$

14. Demostrar la desigualdad

$$\sqrt[n]{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

15. Demostrar la desigualdad

$$(1+a_1)(1+a_2)\ \ldots\ (1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\ldots+a_n,$$

donde los números a_i no son menores que -1 y tienen todos el mismo signo.

16. Demostrar la desigualdad

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant$$
$$\leqslant(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2). \qquad (19)$$

Sugerencia. Demuéstrese primero que el polinomio

$$(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2=$$
$$=x^2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-$$
$$-2x(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$$

no puede tener dos raíces reales distintas.

17. Empleando la desigualdad (19), demostrar que la media aritmética no supera la media cuadrática.

18. Demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}.$$

19. Empleando la desigualdad del ejercicio 18, demostrar la desigualdad

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}>1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

20. Hallar los valores máximos de las funciones

$$\frac{x^3}{x^4+5} \quad \text{y} \quad x^6-0{,}6x^{10}.$$

Respuesta. $\frac{3}{4\sqrt[4]{15}}$ y $0{,}4$.

21. ¿Para qué valor de a el valor mínimo de la función $\sqrt{x}+\frac{a}{x^2}$ es igual a 2,5?

Respuesta. $a=8$.

§ 2. Desigualdad de Hölder

Empleando los teoremas 5 y 6, en el teorema 7 se demuestra la desigualdad de Hölder que posteriormente se aplica a la solución de algunos problemas.

Teorema 6. *Si* $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $x>0$ e $y>0$, *se tiene*

$$xy\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}. \tag{20}$$

Demostración. En virtud del teorema 5, si $\alpha>1$, $a>0$ y $x\geqslant 0$, tenemos

$$x^\alpha-ax\geqslant(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Tomando en esta desigualdad $\alpha = p$ y $a = py$, encontramos

$$x^p - (py)\,x \geqslant (1-p)\left(\frac{py}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} = (1-p)\,y^{\frac{p}{p-1}}. \qquad (21)$$

Puesto que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, resulta

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}, \qquad q = \frac{p}{p-1}, \qquad p-1 = \frac{p}{q}.$$

Introduciendo estos valores en la desigualdad (21), obtenemos

$$x^p - pyx \geqslant -\frac{p}{q}\,y^q.$$

Dividiendo entre p todos los términos de la última desigualdad y pasando los términos negativos de un miembro al otro, obtendremos la desigualdad (20).

Teorema 7. *Si* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ *son números positivos y los números p y q cumplen las condiciones del teorema 6, se tiene*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}. \qquad (22)$$

Demostración. Pongamos

$$a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p = A^p \quad \text{y} \quad b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q = B^q.$$

El segundo miembro de la desigualdad (22) será igual entonces a

$$(A^p)^{\frac{1}{p}} (B^q)^{\frac{1}{q}} = AB.$$

Pongamos ahora

$$a_1 = Ac_1, \quad a_2 = Ac_2, \quad \ldots, \quad a_n = Ac_n,$$
$$b_1 = Bd_1, \quad b_2 = Bd_2, \quad \ldots, \quad b_n = Bd_n.$$

Puesto que

$$A^p = a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p = A^pc_1^p + A^pc_2^p + \ldots + A^pc_n^p =$$
$$= A^p (c_1^p + c_2^p + \ldots + c_n^p),$$

resulta

$$c_1^p + c_2^p + \qquad c_n^p = 1$$

De la misma forma se comprueba que

$$d_1^q + d_2^q + \qquad + d_n^q = 1$$

Aplicando ahora la desigualdad (20), obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} a_1 b_1 = AB\,(c_1 d_1) \leqslant AB\left(\dfrac{c_1^p}{p} + \dfrac{d_1^q}{q}\right), \\ a_2 b_2 \leqslant AB\left(\dfrac{c_2^p}{p} + \dfrac{d_2^q}{q}\right), \\ \\ a_n b_n \leqslant AB\left(\dfrac{c_n^p}{p} + \dfrac{d_n^q}{q}\right) \end{array}\right\} \qquad (*)$$

De estas desigualdades se deduce que

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \qquad + a_n b_n \leqslant$$

$$\leqslant AB\left(\frac{c_1^p + c_2^p + \qquad + c_n^p}{p} + \frac{d_1^q + d_2^q + \qquad d_n^q}{q}\right) =$$

$$= AB\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = AB$$

(recordemos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $c_1^p + c_2^p + \qquad + c_n^p = 1$ y $d_1^q + d_2^q + \qquad + d_n^q = 1$)

Es decir, hemos demostrado que el primer miembro de la desigualdad (22) no pasa de AB, o sea, no sobrepasa el segundo miembro

Es fácil encontrar el caso en el que tiene lugar el signo de igualdad en (22) Efectivamente, el signo de igualdad en (21) tiene lugar sólo si

$$x = \left(\frac{py}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{q}{p}}, \qquad x^p = y^q$$

(véase el teorema 6) De la misma forma, el signo de igualdad en cada una de las expresiones (*) tendrá lugar sólo si

$$c_1 = d_1^{\frac{q}{p}}, \quad c_2 = d_2^{\frac{q}{p}} \qquad , \quad c_n = d_n^{\frac{q}{p}},$$

es decir, si

$$c_1^p = d_1^q, \quad c_2^p = d_2^q, \quad \ldots, \quad c_n^p = d_n^q.$$

Finalmente, multiplicando por A^pB^q estas igualdades, obtenemos

$$B^q(Ac_1)^p = A^p(Bd_1)^q, \text{ es decir, } B^qa_1^p = A^pb_1^q.$$

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{A^p}{B^q}, \quad \frac{a_2^p}{b_2^q} = \frac{A^p}{B^q}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n^p}{b_n^q} = \frac{A^p}{B^q}.$$

Por consiguiente, el signo de igualdad en (22) tiene lugar sólo si

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \ldots = \frac{a_n^p}{b_n^q}.$$

Observación. Poniendo en (22) $p = 2$ y $q = 2$, obtenemos la desigualdad (19) (véase el ejercicio 16):

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)}.$$

§ 3. Aplicación de desigualdades al cálculo de límites

Empleando las desigualdades demostradas, calcularemos en los problemas que siguen los límites de sucesiones bastante complejas.

Problema 1. Demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\,^{1)}. \tag{23}$$

Solución. Uniendo las desigualdades (8) y (9), obtenemos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

---

[1]) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ representa el logaritmo de base e (Véase las págs. 20–21) del número $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Pasando en estas desigualdades a los logaritmos de base e, encontramos definitivamente

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < (n+1) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Problema 2. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ si

$$z_1 = 1+\frac{1}{2}, \quad z_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},$$

$$z_3 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}, \quad z_4 = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}, \ldots$$

$$\ldots, z_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Solución. Tomando en la primera de las desigualdades (23) $n-1$ en lugar de n, obtenemos

$$\frac{1}{n} < \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \ln\frac{n}{n-1}.$$

De esta desigualdad y de la segunda de las desigualdades (23) se deduce que

$$\ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < \ln\frac{n}{n-1}. \tag{24}$$

Empleando las desigualdades (24), podemos escribir las desigualdades

$$\ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < \ln\frac{n}{n-1},$$

$$\ln\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n},$$

$$\ln\frac{n+3}{n+2} < \frac{1}{n+2} < \ln\frac{n+2}{n+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\ln\frac{2n+1}{2n} < \frac{1}{2n} < \ln\frac{2n}{2n-1}.$$

Sumándolas y teniendo en cuenta que la suma de logaritmos es igual al logaritmo del producto, encontramos

$$\ln\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n+1)}{n(n+1)(n+2)\ldots 2n} <$$

$$< \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n} < \ln\frac{n(n+1)(n+2)\ldots 2n}{(n-1)n(n+1)\ldots(2n-1)},$$

o sea,

$$\ln \frac{2n+1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} < \ln \frac{2n}{n-1}. \qquad (25)$$

Puesto que $\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2.$$

De la misma forma, de $\frac{2n}{n-1} = 2 + \frac{2}{n-1}$ se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{2n}{n-1} = \ln 2.$$

Es decir, son iguales los límites de los miembros extremos de las desigualdades (25). Por consiguiente, el miembro intermedio tiene también ese mismo límite, o sea,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} z_n = \ln 2.$$

Problema 3. Hallar $\lim_{n\to\infty} x_n$ si

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ \ldots$$

$$\ldots, x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Solución. Tenemos

$$x_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) -$$

$$- 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) -$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

En el problema anterior hemos tomado

$$z_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Por consiguiente, $x_{2n}=z_n-\frac{1}{n}$. Pero $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\ln 2$ (véase el problema anterior); luego,

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(z_n-\frac{1}{n}\right)=\ln 2.$$

Observemos ahora que $x_{2n+1}=x_{2n}+\frac{1}{2n+1}$ y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(x_{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2.$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\ln 2.$$

Observación. Los números $x_1=a_1$, $x_2=a_1+a_2$, $x_3=a_1+a_2+a_3$, ..., $x_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ se denominan *sumas parciales* de la serie

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$$

Una serie se llama *convergente* si la sucesión de sus sumas parciales tiene límite finito. En esto caso, el número $S=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ se denomina *suma de la serie.*

Del problema 3 se deduce que la serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots$$

converge y que su suma es igual a ln 2.

Problema 4. La serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

se denomina *serie armónica.* Demostrar que la serie armónica diverge.

Solución. Según la desigualdad (23)

$$\frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}.$$

Poniendo $n = 1, 2, 3, \ldots, n$, podemos escribir n desigualdades

$$1 > \ln\frac{2}{1},$$

$$\frac{1}{2} > \ln\frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{3} > \ln\frac{4}{3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}.$$

Sumándolas, obtenemos

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} >$$
$$> \ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} = \ln(n+1).$$

De esta desigualdad se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty;$$

por consiguiente, la serie armónica diverge.

Problema 5. Demostrar que la serie

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots \tag{26}$$

converge para cualquier $\alpha > 1$.

Solución. La sucesión de las sumas parciales de esta serie

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2^\alpha},$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha},$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$$

es monótona creciente, o sea,

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots < x_n < \ldots$$

Por otra parte, sabemos que toda sucesión de números monótona creciente y acotada tiene un límite finito. Por consiguiente, para demostrar la convergencia de la serie (26) basta demostrar que la sucesión de los números x_n es acotada. Pongamos

$$y_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

Puesto que

$$y_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha}\right) - \left(\frac{1}{4^\alpha} - \frac{1}{5^\alpha}\right) - \ldots$$

$$\ldots - \left(\frac{1}{(2n-2)^\alpha} - \frac{1}{(2n-1)^\alpha}\right) - \frac{1}{(2n)^\alpha},$$

resulta que

$$y_{2n} < 1.$$

(pues en todos los paréntesis figuran números positivos). Por otra parte

$$y_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) -$$

$$-2\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) - \frac{2}{2^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Puesto que $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$, tenemos

$$y_{2n} = x_{2n} - \frac{2}{2^\alpha} x_n.$$

Ahora bien, como $x_{2n} > x_n$ e $y_{2n} < 1$, resulta

$$1 > y_{2n} > x_n - \frac{2}{2^\alpha} x_n = \frac{2^\alpha - 2}{2^\alpha} x_n.$$

De aquí se deduce que

$$x_n < \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}$$

o sea, los números x_n están acotados si $\alpha > 1$. Con esto queda demostrado que la serie (26) converge y que su suma no pasa de $\frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}$.

Por ejemplo, para $\alpha = 2$, se tiene

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{2^2}{2^2 - 2} = 2,$$

$$S = \lim_{n \to \infty} x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \leqslant 2.$$

En el curso de Matemáticas Superiores se demuestra que

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}. \qquad (27)$$

Ejercicios

22. Hallar la suma de la serie

$$S = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Sugerencia. Empléese la igualdad (27).

Respuesta. $S = \frac{\pi^2}{12}$.

23. Demostrar las desigualdades

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < 1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha < \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha > 0.$$

24. Siendo

$$x_n = 1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha,$$

demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}, \quad \alpha > 0.$$

25. Demostrar la desigualdad

$$(a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \ldots + a_n b_n c_n)^3 \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \ldots$$
$$\ldots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \ldots + c_n^3),$$

donde a_k, b_k y c_k son números positivos.

Sugerencia. Aplíquese la desigualdad (7) y el método empleado para demostrar (22).

26. Para $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{kn}$ donde k es un número entero positivo, demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \ln k.$$

Sugerencia. Aplíquese el método de solución empleado en el problema 2 de este parágrafo.

§ 4. Aplicación de desigualdades al cálculo aproximado

Al iniciar nuestra exposición hemos señalado que los problemas prácticos requieren, como regla, el cálculo aproximado de ciertas magnitudes y también el saber operar con estas magnitudes calculadas aproximadamente. Cuanto mayor sea la exactitud en el cálculo de estas magnitudes, menor será, lógicamente, el error en la solución del problema.

Ahora queremos volver al cálculo aproximado de los números de tipo

$$S_{n,k} = \frac{1}{k^{\alpha}} + \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1, \ k < n.$$

En el § 1 del capítulo I hemos calculado el número $S_{n,k}$ para $k = 1$, $n = 1\,000\,000$ y $\alpha = \frac{1}{2}$ con un error menor que 0,4 (problema 2). Allí mismo (ejercicios 2 y 3) hemos calculado $S_{n,k}$ para $k = 10\,000$, $n = 10^6$ y $\alpha = \frac{1}{2}$ con un error menor que 0,01. La comparación de estos dos ejemplos pone de manifiesto que el método empleado da mejores resultados para valores mayores de k. En el § 4 del capítulo I (problema 3) hemos encontrado la parte entera del número $S_{n,k}$ para $k = 4$, $n = 10^6$ y $\alpha = \frac{1}{3}$, o sea, hemos calculado este número con un error menor que 0,5. No hemos determinado la parte entera del número $S_{n,1}$ para $\alpha = \frac{1}{3}$ y $n = 10^6$ por cuanto el método empleado en el primer capítulo no es aplicable a este caso. En el parágrafo presente perfeccionaremos el método de cálculo de la magni-

tud $S_{n.1}$ lo que permitirá hallar magnitudes semejantes con relativa facilidad y alta precisión.

Lema 1. *Si* $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n$, *se tiene*

$$0 < A = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + (-1)^{n-1}x_n < x_1.$$

Demostración. En esta suma algebraica, el número de sumandos positivos no es menor que el número de sumandos negativos. Además, cualquier sumando positivo es mayor que el sumando negativo que le sigue. Por consiguiente, es positiva la suma algebraica de estos términos: $A > 0$. Por otra parte,

$$A = x_1 - (x_2 - x_3 + x_4 - \ldots + (-1)^{n-2}x_n)$$

y, puesto que el número que figura entre los paréntesis es positivo, resulta $A < x_1$. Hemos demostrado el lema.

Lema 2. *Para* $0 < \alpha < 1$, *son válidas las desigualdades*

$$\frac{(2n+1)^{1-\alpha}-(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(2n)^\alpha} < \frac{(2n)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \qquad (28)$$

Demostración. La desigualdad (28) resulta de la desigualdad (14) (problema 2 del § 4 del capítulo I) si en esta última tomamos $n+1$ en lugar de m, $2n$ en lugar de n y $-\alpha$ en lugar de α.

Teorema 8. *Es válida la igualdad*

$$S_{n,1} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} =$$
$$= \frac{2^\alpha}{2-2^\alpha}\left[\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right] -$$
$$- \frac{2^\alpha}{2-2^\alpha}\left[1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \ldots - \frac{1}{(2n)^\alpha}\right]. \qquad (29)$$

Demostración. Tenemos

$$S_{n,1} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(2n)^\alpha} - \left[\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right].$$

Agregando y resultando en el segundo miembro el número

$$2\left[\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right],$$

obtenemos

$$S_{n,1}=1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\ldots-\frac{1}{(2n)^\alpha}+$$
$$+2\left[\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right]-$$
$$-\left[\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right].$$

Los números que aparecen dentro del primer corchete tienen $\frac{1}{2^\alpha}$ como factor común; sacándolo fuera encontramos

$$S_{n,1}=1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}-\ldots-\frac{1}{(2n)^\alpha}+$$
$$+\frac{2}{2^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\right)-$$
$$-\left[\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right].$$

Pero como entre los paréntesis aparece el número $S_{n,1}$, resulta

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n)^\alpha}-$$
$$-\left[1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\ldots-\frac{1}{(2n)^\alpha}\right]=$$
$$=\left(\frac{2}{2^\alpha}-1\right)S_{n,1}=\frac{2-2^\alpha}{2^\alpha}S_{n,1}.$$

De aquí, multiplicando por 2^α y dividiendo entre $2-2^\alpha$, se obtiene la igualdad (29).

La igualdad (29) tiene interés por cuanto reduce el cálculo de $S_{n,1}$ al cálculo de la magnitud $S_{2n,n+1}$ y de la magnitud $1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\ldots-\frac{1}{(2n)^\alpha}$. La primera se calcula con elevada exactitud, para valores grandes de n, aplicando las desigualdades (28). En cuanto a la segunda, sabemos del lema 1 que es menor que cero y mayor que

$-\frac{2^{\alpha}}{2-2^{\alpha}}$. Además, si hallamos la suma de los cuatro términos iniciales de esta última magnitud, el resto (o sea, el error) será menor que cero y mayor que $-\frac{1}{5^{\alpha}}\cdot\frac{2^{\alpha}}{2-2^{\alpha}}$.

En los problemas que siguen, esta última magnitud también será calculada con mayor exactitud.

Problema 1. Hallar la suma

$$A=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10^6}}$$

con un error menor que 0,002.

Solución. En virtud del teorema 8, tenemos

$$A=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{10^6+1}}+\frac{1}{\sqrt{10^6+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 10^6}}\right)-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 10^6}}\right)=$$

$$=(\sqrt{2}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{10^6+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 10^6}}\right)-$$

$$-(\sqrt{2}+1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 10^6}}\right)=$$

$$=(\sqrt{2}+1)(B-C),$$

donde

$$B=\frac{1}{\sqrt{10^6+1}}+\frac{1}{\sqrt{10^6+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 10^6}},$$

$$C=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 10^6}}.$$

Según el lema 2, el número B satisface las desigualdades

$$2(\sqrt{2\cdot 10^6+1}-\sqrt{10^6+1})<B<2(\sqrt{2\cdot 10^6}-\sqrt{10^6}).$$

Los miembros extremos de estas desigualdades difieren en $3\cdot 10^{-4}$ todo lo más. En efecto,

$$2(\sqrt{10^6+1}-\sqrt{10^6})-2(\sqrt{2\cdot 10^6+1}-\sqrt{2\cdot 10^6})=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{10^6+1}+\sqrt{10^6}}-\frac{2}{\sqrt{2\cdot 10^6+1}+\sqrt{2\cdot 10^6}}\approx\frac{1}{\sqrt{10^6}}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 10^6}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1000}<3\cdot 10^{-4}.$$

Por consiguiente, la media de estos números difiere del número B en $2 \cdot 10^{-4}$ todo lo más. Calculando el primer número y restando de él $2 \cdot 10^{-4}$, obtenemos

$$B = 828{,}4269 \pm \Delta_1,$$

$$|\Delta_1| < 2 \cdot 10^{-4}.$$

Pasemos a calcular el número C. Sea m un número impar. Estimemos la magnitud

$$D = \frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{\sqrt{m+2}} - \ldots - \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Con este fin observemos que

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1} = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1}}$$

y que

$$E = \frac{2}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1}} - \frac{2}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}} + \frac{2}{\sqrt{m+3} + \sqrt{m+1}} -$$

$$- \frac{2}{\sqrt{m+4} + \sqrt{m+2}} + \ldots - \frac{2}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}} =$$

$$= \sqrt{m+1} - \sqrt{m-1} - \sqrt{m+2} + \sqrt{m} + \sqrt{m+3} -$$

$$- \sqrt{m+1} - \sqrt{m+4} + \sqrt{m+2} + \ldots - \sqrt{2n+1} +$$

$$+ \sqrt{2n-1} = \sqrt{m} - \sqrt{m-1} + \sqrt{2n} - \sqrt{2n+1}.$$

Como vemos, es relativamente fácil calcular el número E. Restando de la magnitud E la magnitud D, obtenemos

$$E - D = \left(\frac{2}{\sqrt{m+1} - \sqrt{m-1}} - \frac{1}{\sqrt{m}} \right) -$$

$$- \left(\frac{2}{\sqrt{m+2} + \sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}} \right) + \ldots$$

$$\ldots - \left(\frac{2}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right).$$

Demostremos que los números que aparecen entre los paréntesis son positivos y decrecen monótonamente. En efecto,

$$\frac{2}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1}} - \frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{2\sqrt{m} - (\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})}{\sqrt{m}\,(\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})} =$$

$$= \frac{2m - 2\sqrt{m^2-1}}{\sqrt{m}\,(\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})\,(2\sqrt{m} + \sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{m}\,(\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})\,(2\sqrt{m} + \sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})\,(m + \sqrt{m^2-1})}.$$

De aquí puede verse que dichos números son positivos y decrecen monótonamente a medida que aumenta m. En virtud del lema 1

$$0 < E - D <$$

$$< \frac{2}{\sqrt{m}(\sqrt{m+1}+\sqrt{m-1})(2\sqrt{m}+\sqrt{m+1}+\sqrt{m-1})(m+\sqrt{m^2-1})}.$$

No cometeremos un error muy grande si en el denominador sustituimos $m+1$ y $m-1$ por m. Tendremos entonces

$$0 < E - D < \frac{2}{\sqrt{m}\cdot 2\sqrt{m}\cdot 4\sqrt{m}\cdot 2m} = \frac{1}{8\cdot m^{\frac{5}{2}}}.$$

Si tomamos $m = 9$, tendremos

$$0 < E - D < \frac{1}{8\cdot 81\cdot 3} < 0{,}0006.$$

Es decir, para $m = 9$ y $n = 10^6$ resulta

$$E - D = 0{,}0003 \pm \Delta_2, \quad |\Delta_2| < 0{,}0003,$$

$$D = E - 0{,}0003 \pm \Delta_2 = \sqrt{9} - \sqrt{8} + \sqrt{2\cdot 10^6} -$$

$$- \sqrt{2\cdot 10^6 + 1} - 0{,}0003 \pm \Delta_2 = 0{,}1710 \pm \Delta_2.$$

Volviendo a la magnitud C, encontramos

$$C = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + D =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} +$$

$$+ 0{,}1710 \pm \Delta_2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + 0{,}1710 \pm \Delta_2 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{7}}{7} + 0{,}1710 \pm \Delta_2.$$

O sea, para calcular el número C con un error menor que $3\cdot 10^{-4}$ necesitaremos extraer solamente cinco raíces y realizar unas cuantas operaciones aritméticas. Recurriendo a las tablas y realizando los cálculos correspondientes, encontramos

$$C = 0{,}6035 \pm \Delta_2.$$

Tomando en cuenta los valores obtenidos para B y C, y retornando a la magnitud A encontramos

$$A = (\sqrt{2}+1)(B-C) = (\sqrt{2}+1)(827,8226 \pm \Delta_3) =$$
$$= (\sqrt{2}+1)\cdot 827,8226 \pm 2,5\Delta_3,$$

donde

$$|2,5\Delta_3| \leqslant 2,5(|\Delta_1| + |\Delta_2|) < 2,5\cdot 5\cdot 10^{-4} < 2\cdot 10^{-3}.$$

Por consiguiente, con un error menor que $2\cdot 10^{-3}$ tenemos

$$A = (\sqrt{2}+1)\,827,8226 = 1998,539.$$

Problema 2. Calcular el número

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{10^{12}}}$$

con un error menor que la unidad.

Solución. En virtud del teorema 8, tenemos

$$A = \frac{\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt[4]{2}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{10^{12}+1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{10^{12}+2}} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{2\cdot 10^{12}}}\right) - \frac{\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt[4]{2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots - \frac{1}{\sqrt[4]{2\cdot 10^{4}}}\right).$$

Aplicando las desigualdades (28), podemos calcular fácilmente y con gran exactitud el primer sumando que, según estas desigualdades, puede ser sustituido por el número

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt[4]{2}}\;\frac{(2\cdot 10^{12})^{\frac{3}{4}} - (10^{12})^{\frac{3}{4}}}{1-\frac{1}{4}} =$$
$$= \frac{4}{3}\cdot 10^9(\sqrt[4]{8}-1)\frac{\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt[4]{2}} = \frac{4}{3}\cdot 10^9.$$

En virtud del lema 1, la suma

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt[4]{2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \ldots - \frac{1}{\sqrt[4]{2\cdot 10^{12}}}\right)$$

es positiva y no supera el primer sumando. Puesto que este último es menor que dos, tenemos

$$\frac{4}{3}\cdot 10^9-2<A<\frac{4}{3}\cdot 10^9.$$

Los números extremos difieren uno del otro en 2 y en menos de 2 del número A. La media aritmética de estos números, o sea, $\frac{4}{3}\cdot 10^9-1$, difiere de A en menos de 1. Tomando este último número, obtenemos

$$A=1333333332{,}3\pm\Delta,\qquad |\Delta|<1.$$

Notemos que el número A (que comprende un billón de sumandos) ha sido calculado con gran exactitud. El error relativo es menor que

$$100:1333333332{,}3<0{,}0000001\,\%.$$

Ejercicios

27. Calcular con un error menor que la unidad el número

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{10^6}}$$

Respuesta. 14 999

28. Demostrar que es válida la igualdad

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}=\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}-C+\beta_n,$$

donde β_n es un infinitésimo (o sea, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$) y

$$C=\frac{2^\alpha}{2-2^\alpha}\left[1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha}+\ldots\right]$$

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

1. Poniendo en las desigualdades (1) (pág. 9) $n=m,\ m+1, \ldots n!$, tendremos

$$2\sqrt{m+1}-2\sqrt{m}<\frac{1}{\sqrt{m}}<2\sqrt{m}-2\sqrt{m-1},$$

$$2\sqrt{m+2}-2\sqrt{m+1}<\frac{1}{\sqrt{m+1}}<2\sqrt{m+1}-2\sqrt{m},$$

$$2\sqrt{m+3}-2\sqrt{m+2}<\frac{1}{\sqrt{m+2}}<2\sqrt{m+2}-2\sqrt{m+1},$$

. . . .

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

Sumando estas desigualdades, encontramos

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{m}<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\frac{1}{\sqrt{m+2}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{m-1}.$$

2. Tomando $m=10\,000$ y $n=1\,000\,000$ en las desigualdades del ejercicio 1, obtenemos

$$2\sqrt{1\,000\,001}-2\sqrt{10\,000}<\frac{1}{\sqrt{10\,000}}+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}<2\sqrt{1\,000\,000}-2\sqrt{9999}.$$

Puesto que

$$2\sqrt{1\,000\,001}>2\sqrt{1\,000\,000}=2000,$$

$$2\sqrt{10\,000}=200 \quad \text{y} \quad 2\sqrt{9999}=\sqrt{39\,996}>199{,}98$$

(la última desigualdad se comprueba fácilmente si se calcula la raíz cuadrada en menos de 0,01), resulta

$$2000-200=1800<\frac{1}{\sqrt{10\,000}}+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}<2000-199{,}98=1800{,}02$$

3. Multiplicando por 50 las desigualdades del ejercicio 2, obtenemos

$$90\,000<50z<90\,001,$$

de donde

$$[50z]=90\,000.$$

4. Es obvio que la desigualdad se cumple para $n=1$;

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1+1}}=\frac{1}{2}.$$

Supongamos ahora que la desigualdad se cumple para $n=k$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \tag{a}$$

y demostremos que también se cumple para $n=k+1$, o sea, que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+4}}. \tag{b}$$

Multiplicando por $\frac{2k+1}{2k+2}$ la desigualdad (a), obtenemos

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Resta demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

Multiplicándola por $(2k+2)\sqrt{3k+1}\sqrt{3k+4}$ y elevando al cuadrado ambos miembros de la desigualdad obtenida, encontramos

$$(2k+1)^2(3k+4) < (2k+2)^2(2k+1)$$

ó

$$12k^3+28k^2+19k+4 < 12k^3+28k^2+20k+4.$$

Es evidente que esta última desigualdad se cumple pues $k \geqslant 1$.

Con esto queda demostrado que la desigualdad

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

es válida para todo n.

5. Poniendo $n=50$ en la desigualdad del ejercicio 4, obtenemos

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 50+1}} = \frac{1}{\sqrt{151}} < \frac{1}{\sqrt{144}} = \frac{1}{12}.$$

6. Si tomamos $y=6-x$, $x=6-y$, el problema quedará reducido a la determinación del máximo de la función

$$(6-y)\,y^2=6y^2-y^3$$

para $0<y<6$. Poniendo ahora $y^2=z$, obtendremos la función

$$6z-z^{\frac{3}{2}}$$

cuyo valor máximo (véase la observación de la pág. (34) es igual a

$$\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{6}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1}}=0{,}5\cdot 4^3=32$$

y se alcanza en el punto

$$z=\left(\frac{6}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}-1}}=4^2.$$

La función $6y^2-y^3$ toma su valor máximo, igual a 32, en el punto $y=\sqrt{z}=4$.

La función $x(6-x)^2$ alcanza su valor máximo, igual a 32, en el punto $x=6-y=6-4=2$.

7. El volumen de la caja (véase la fig. 4 de la pág. 39) es igual a

$$V=x(2a-2x)^2=4x(a-x)^2, \qquad 0<x<a.$$

Poniendo $y=a-x$ e $y^2=z$, tendremos

$$V=4(az-z^{\frac{3}{2}}).$$

La función $az-z^{\frac{3}{2}}$ alcanza su valor máximo en el punto

$$z=\left(\frac{a}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}-1}}=\left(\frac{2a}{3}\right)^2.$$

Por consiguiente,

$$y=\sqrt{z}=\frac{2a}{3}, \qquad x=a-y=a-\frac{2a}{3}=\frac{a}{3}.$$

Es decir, para que el volumen de la caja sea máximo, la dimensión del cuadrado recortado debe ser seis veces menor que la dimensión del cuadrado inicial.

8. El valor mínimo de la función x^6+8x^2+5 es igual a 5 y se alcanza para $x=0$.

9. Tomando $y=x^2$, reducimos el problema a la determinación del valor mínimo de la función

$$y^2-8y+5$$

para valores positivos de y.

En el teorema 5 hemos demostrado que el valor mínimo de la función y^3-8y es igual a

$$(1-3)\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{3-1}}=-2\frac{8^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}=-\frac{32\sqrt{6}}{9}.$$

El valor mínimo de la función y^3-8y+5 es igual a

$$-\frac{32\sqrt{6}}{9}+5=-3{,}6\ldots$$

10. Poniendo $y=x^{\alpha}$, obtenemos la función

$$y-ay^{\frac{1}{\alpha}}=a\left(\frac{1}{a}y-y^{\frac{1}{\alpha}}\right),\qquad a>0,\ \frac{1}{\alpha}>1.$$

Según el teorema 5, el valor máximo de la función $\frac{1}{a}y-y^{\frac{1}{\alpha}}$ es igual a

$$\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}-1}}=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Multiplicando por a este último resultado, encontraremos el valor máximo de la función $a\left(\frac{1}{a}y-y^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ que, por consiguiente, es igual a

$$(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)\cdot\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}=(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{1+\frac{1}{\alpha-1}}=(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

11. La función $\sqrt[4]{x}-2x$, $x\geqslant 0$, $\alpha=\frac{1}{4}$, $a=2$, tiene el siguiente valor máximo:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-1}}=\frac{3}{4}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}.$$

Por consiguiente, para todo $x\geqslant 0$ se cumple la desigualdad

$$\sqrt[4]{x}-2x\leqslant\frac{3}{8},\quad \text{o sea,}\quad \sqrt[4]{x}\leqslant\frac{3}{8}+2x.$$

12. Representemos la desigualdad (8) en la forma

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e,\qquad (n+1)^n<en^n.$$

Si $n \geqslant 3 > e$, se tiene

$$(n+1)^n < en^n < 3n^n \leqslant nn^n = n^{n+1}.$$

Elevando ambos miembros de la última desigualdad a la potencia $\frac{1}{n(n+1)}$, encontramos

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}.$$

13. Puesto que $1 < \sqrt{2} = \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$, resulta que el mayor entre los números 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ es $\sqrt[3]{3}$. Por otra parte, en el problema anterior hemos demostrado que la sucesión $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, ..., $\sqrt[n]{n}$, ... es decreciente. Por lo tanto, $\sqrt[3]{3}$ es el mayor de los números 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, ..., $\sqrt[n]{n}$, ...

14. Pongamos $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n > 0$. Elevando a la potencia n, obtenemos

$$n = (1+\alpha_n)^n = [(1+\alpha_n)^{\frac{n}{2}}]^2.$$

Aceptando que $n \geqslant 2$, $\frac{n}{2} \geqslant 1$, deducimos del teorema 3 que

$$(1+\alpha_n)^{\frac{n}{2}} > 1 + \frac{n}{2}\alpha_n, \quad n > \left(1 + \frac{n}{2}\alpha_n\right)^2 =$$
$$= 1 + n\alpha_n + \frac{n^2}{4}\alpha_n^2.$$

De aquí resulta que

$$n > \frac{n^2}{4}\alpha_n^2, \quad \alpha_n^2 < \frac{4}{n}, \quad \alpha_n < \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n <$$
$$< 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Observación. Empleando el binomio de Newton, es fácil comprobar que

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

En efecto,

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n = 1 + n\sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{2}{n} + \ldots >$$
$$> 1 + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{2}{n} = n.$$

De aquí se deduce que

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

15. Si $n=1$ $a_i > -1$, la desigualdad es obvia:

$$1 + a_i \geqslant 1 + a_i.$$

Supongamos que la desigualdad se cumple para $n=k$, o sea,

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

Multiplicando por $(1+a_{k+1})$ ambos miembros de esta desigualdad, obtenemos

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k)(1+a_{k+1}) \geqslant$$
$$\geqslant (1+a_1+a_2+\dots+a_k)(1+a_{k+1}) =$$
$$= 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} +$$
$$+ a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \dots + a_ka_{k+1}.$$

Puesto que los números $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ son del mismo signo, tenemos

$$a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \dots + a_ka_{k+1} \geqslant 0$$

y, por consiguiente,

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k)(1+a_{k+1}) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1},$$

es decir, hemos demostrado la desigualdad para $n=k+1$.

Con esto concluye la demostración de que la desigualdad

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

se cumple para todo n.

16. Si el polinomio $(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\dots+(a_nx-b_n)^2$ tiene una raíz real $x=x_1$, o sea, si

$$(a_1x_1-b_1)^2+(a_2x_1-b_2)^2+\dots+(a_nx_1-b_n)^2=0,$$

entonces cada uno de los números $a_1x_1-b_1,\ a_2x_1-b_2, \dots, a_nx_1-b_n$ es igual a cero, es decir

$$0 = a_1x_1 - b_1 = a_2x_1 - b_2 = \dots = a_nx_1 - b_n \quad \text{y}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n}.$$

Con esto queda demostrado que el polinomio

$$(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\dots+(a_nx-b_n)^2 =$$
$$= x^2(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2) - 2x(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n) +$$
$$+ (b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)$$

no puede tener dos raíces reales distintas y, por consiguiente,

$$(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2 -$$
$$-(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2) \leqslant 0.$$

De aquí resulta la desigualdad (19)

$$(a_1b_1+b_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant$$
$$\leqslant(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

Notemos que el signo de igualdad tiene lugar sólo si el polinomio considerado tiene raíz real, o sea sólo si

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

17. Empleando la desigualdad (19), tenemos

$$c_1^2=\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2=\left(\frac{a_1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_1^2}{n}+\frac{a_2^2}{n}+\ldots+\frac{a_n^2}{n}\Big)\times$$
$$\times\Big(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{n}\Big)=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}=c_2^2.$$

De aquí resulta que

$$c_1\leqslant c_2$$

(es decir, la media aritmética no pasa de la media cuadrática).

18. De la desigualdad

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^2=n+1+2\sqrt{n^2-1}+n-1=$$
$$=2n+2\sqrt{n^2-1}<2n+2\sqrt{n^2}=4n$$

se deduce que

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{2}$$

Multiplicando por 2, encontramos

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}.$$

19. Tomamos en la desigualdad del ejercicio (18) $n=2, 3, \ldots, n$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{3}-1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}<\sqrt{4}-\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}} < \sqrt{5} - \sqrt{3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} < \sqrt{6} - \sqrt{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

Sumando estas desigualdades, resulta

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2} - 1.$$

Agregando 1 a ambos miembros de la desigualdad, encontramos definitivamente

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}.$$

Observación. En el § 1 del capítudo II hemos demostrado que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1.$$

Los números $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}$ y $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1$ difieren uno del otro en menos de 0,42. Cada uno de estos números puede ser considerado como el valor aproximado de la suma

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = z_n.$$

Señalemos, sin demostrarlo, que el número $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}$ difiere menos del número z_n que el número $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1$.

20. La función $\frac{x^3}{x^4+5}$ toma valores negativos si $x < 0$. Por consiguiente, esta función alcanza su valor máximo para valores positivos de x.

Puesto que

$$\frac{x^3}{x^4+5} = \frac{1}{5\left(\frac{1}{5}x + x^{-3}\right)},$$

la función alcanza su valor máximo en el mismo punto en el que la función $\frac{1}{5}x + x^{-3}$ tiene su valor mínimo. Según el problema 4

del § 1 del capítulo II, el valor mínimo de esta función es igual a

$$(1+3)\left(\frac{\frac{1}{5}}{3}\right)^{\frac{-3}{-3-1}}=4\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

El valor máximo de la función $\frac{x^3}{x^4+5}$ es igual a

$$\frac{1}{5\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{4}}}=\frac{15^{\frac{3}{4}}}{20}=\frac{15}{20\sqrt[4]{15}}=\frac{3}{4\sqrt[4]{15}}.$$

Para hallar el valor máximo de la función $x^6-0{,}6x^{10}$, tomemos $y=x^6$. Está claro que $y\geqslant 0$. La función

$$y-0{,}6y^{\frac{10}{6}}=0{,}6\left(\frac{10}{6}y-y^{\frac{10}{6}}\right)$$

tiene como valor máximo (véase la observación de la pág. 34) el número

$$0{,}6\left(\frac{10}{6}-1\right)\left(\frac{\frac{10}{6}}{\frac{10}{6}}\right)^{\frac{\frac{10}{6}}{\frac{10}{6}-1}}=0{,}4.$$

21. Tomando en este ejercicio $y=\frac{1}{x^2}$, obtenemos

$$\sqrt{x}+\frac{a}{x^2}=y^{-\frac{1}{4}}+ay.$$

Del problema 4 del § 1 del capítulo II se desprende que el valor mínimo de la función $y^{-\frac{1}{4}}+ay$ es igual a

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)(4a)^{\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}(4a)^{\frac{1}{5}}.$$

Poniendo $\frac{5}{4}(4a)^{\frac{1}{5}}=2{,}5$, obtenemos

$$(4a)^{\frac{1}{5}}=2,\ 4a=32 \text{ y } a=8.$$

22. $S = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \ldots =$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right) -$$

$$-2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right) -$$

$$-\frac{2}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(Hemos empleado la igualdad (27)).

23. Puesto que $\alpha > 0$, es $\alpha + 1 > 1$ y, por lo tanto,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} > 1 + \frac{1+\alpha}{n},$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} > 1 - \frac{1+\alpha}{n}.$$

Multiplicando por $n^{1+\alpha}$ estas desigualdades, encontramos

$$(n+1)^{1+\alpha} > n^{1+\alpha} + (1+\alpha)\, n^{\alpha},$$

$$(n-1)^{1+\alpha} > n^{1+\alpha} - (1+\alpha)\, n^{\alpha}.$$

De aquí resulta

$$\frac{n^{1+\alpha} - (n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} < n^{\alpha} < \frac{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Escribamos estas desigualdades para $n = 1, 2, 3, \ldots, n$:

$$\frac{1}{1+\alpha} < 1 < \frac{2^{1+\alpha} - 1}{1+\alpha},$$

$$\frac{2^{1+\alpha} - 1}{1+\alpha} < 2^{\alpha} < \frac{3^{1+\alpha} - 2^{1+\alpha}}{1+\alpha},$$

. . . .

$$\frac{n^{1+\alpha} - (n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} < n^{\alpha} < \frac{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}}{1+\alpha},$$

Sumándolas, obtenemos

$$\frac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha} < 1 + 2^{\alpha} + 3^{\alpha} + \ldots + n^{\alpha} < \frac{(n+1)^{1+\alpha} - 1}{1+\alpha} < \frac{(n+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

24. De las desigualdades del ejercicio 23 se deduce que

$$\frac{1}{1+\alpha}<\frac{1+2^{\alpha}+3^{\alpha}+\ldots+n^{\alpha}}{n^{1+\alpha}}<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

El miembro izquierdo de estas desigualdades es un número constante $\frac{1}{1+\alpha}$ mientras que el miembro derecho tiende a $\frac{1}{1+\alpha}$ cuando n tiende a ∞. Por consiguiente, el término medio tiende al mismo límite, o sea,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^{\alpha}+3^{\alpha}+\ldots+n^{\alpha}}{n^{1+\alpha}}=\frac{1}{1+\alpha}.$$

25. Pongamos

$$A^3=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3,$$
$$B^3=b_1^3+b_2^3+\ldots+b_n^3,$$
$$C^3=c_1^3+c_2^3+\ldots+c_n^3,$$

$$x_1=\frac{a_1}{A},\quad x_2=\frac{a_2}{A},\ \ldots,\quad x_n=\frac{a_n}{A}$$

$$y_1=\frac{b_1}{B},\quad y_2=\frac{b_2}{B},\ \ldots,\quad y_n=\frac{b_n}{B},$$

$$z_1=\frac{c_1}{C},\quad z_2=\frac{c_2}{C},\ \ldots,\quad z_n=\frac{c_n}{C}.$$

En virtud de las desigualdades (7), tenemos

$$a_1b_1c_1=ABCx_1y_1z_1\leqslant ABC\,\frac{x_1^3+y_1^3+z_1^3}{3}.$$

$$a_2b_2c_2=ABCx_2y_2z_2\leqslant ABC\,\frac{x_2^3+y_2^3+z_2^3}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_nb_nc_n=ABCx_ny_nz_n\leqslant ABC\,\frac{x_n^3+y_n^3+z_n^3}{3}.$$

Sumándolas, encontramos

$$a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\ldots+a_nb_nc_n\leqslant ABC\left(\frac{x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3}{3}+\right.$$
$$\left.+\frac{y_1^3+y_2^3+\ldots+y_n^3}{3}+\frac{z_1^3+z_2^3+\ldots+z_n^3}{3}\right).$$

Teniendo en cuenta nuestras designaciones, es fácil calcular que

$$x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3=\frac{a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3}{A^3}=\frac{A^3}{A^3}=1.$$

$$y_1^3+y_2^3+\ldots+y_n^3=1,\qquad z_1^3+z_2^3+\ldots+z_n^3=1.$$

Por consiguiente,

$$a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\ldots+a_nb_nc_n \leqslant ABC\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=ABC.$$

Elevando al cubo ambos miembros de esta desigualdad, obtenemos definitivamente

$$(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\ldots+a_nb_nc_n)^3 \leqslant A^3B^3C^3=$$
$$(a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3)(b_1^3+b_2^3+\ldots+b_n^3)(c_1^3+c_2^3+\ldots+c_n^3).$$

26. Consideremos las desigualdades (24) para distintos valores de n:

$$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1},$$
$$\ln\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ln\frac{kn+1}{kn}<\frac{1}{kn}<\ln\frac{kn}{kn-1}.$$

Sumando estas desigualdades, encontramos

$$\ln\frac{(n+1)(n+2)\ldots(kn+1)}{n(n+1)\ldots kn}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{kn}<$$
$$<\ln\left[\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\ldots\frac{kn}{kn-1}\right],$$

o sea,

$$\ln\frac{kn+1}{n}=\ln\left(k+\frac{1}{n}\right)<$$
$$<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{kn}<\ln\frac{kn}{n-1}=\ln\left(k+\frac{k}{n-1}\right).$$

Si n tiende al infinito, entonces $\ln\left(k+\frac{1}{n}\right)$ tiende a $\ln k$ y $\ln\times\left(k+\frac{k}{n-1}\right)$ tiende al mismo límite. Por consiguiente, también

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{kn}\right)=\ln k.$$

27. En virtud del teorema 6,

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{10^6}}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{10^6+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{10^6+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{2\cdot 10^6}}\right)-$$
$$-\frac{\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt[3]{2\cdot 10^6}}\right).$$

El segundo sumando es negativo y mayor que $-\frac{\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}} >$ $> -1{,}9$. El primer sumando, de acuerdo con las desigualdades (28), satisface las desigualdades

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{2\cdot 10^6+1}-\sqrt[3]{10^6+1}\right)\frac{\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}} <$$

$$< \frac{\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{10^6+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{10^6+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{2\cdot 10^6}}\right) <$$

$$< \frac{\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{2\cdot 10^6}-\sqrt[3]{10^6}\right)\frac{3}{2} = 15\,000.$$

Puesto que los miembros extremos de las últimas desigualdades difieren poco uno del otro (en menos de 0,1), resulta que

$$15\,000-2 < 1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{10^6}} < 15\,000.$$

El número medio 14 999 difiere de $\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ en menos de 1.

28. En virtud del teorema 6, tenemos

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}=$$

$$=\frac{2^\alpha}{2-2^\alpha}\left[\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right]-$$

$$-\frac{2^\alpha}{2-2^\alpha}\left[1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\ldots-\frac{1}{(2n)^\alpha}\right]=A_n-B_n,$$

donde

$$A_n=\frac{2^\alpha}{2-2^\alpha}\left[\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right],$$

$$B_n=\frac{2^\alpha}{2-2^\alpha}\left[1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\ldots-\frac{1}{(2n)^\alpha}\right].$$

El número B_n es la suma parcial de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^\alpha}{2-2^\alpha}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^\alpha}.$$

Esta es una serie alterna y los valores absolutos de sus términos decrecen monótonamente. El valor absoluto del resto de esta serie

no supera el valor absoluto del primer término del resto, o sea no pasa de $\frac{2^{\alpha}}{2-2^{\alpha}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}$. Pero este número tiende a cero si $n \longrightarrow \infty$; por eso, la serie converge y

$$\lim_{n \to \infty} B_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{\alpha}}{2-2^{\alpha}} (-1)^k \frac{1}{k^{\alpha}} = C,$$

o sea, $\gamma_n = B_n - C$ es un infinitésimo. Ahora bien, empleando las desigualdades (28), tenemos

$$\frac{2^{\alpha}}{2-2^{\alpha}} [(2n-1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}] < A_n <$$

$$< \frac{2^{\alpha}}{2-2^{\alpha}} [(2n)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}] = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Como quiera que la diferencia entre los miembros extremos de esta desigualdad tiende hacia cero si $n \longrightarrow \infty$, resulta que $\delta_n = A_n - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ es un infinitésimo Por consiguiente,

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} = A_n - B_n =$$

$$= \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \delta_n - C + \gamma_n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - C + \beta_n,$$

donde $\beta_n = \delta_n + \gamma_n$ es un infinitésimo.

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820 Moscú, I-110, GSP, URSS.

Lecciones populares de matemáticas

En 1976 MIR publicará:

División del segmento
en la razón dada
de N. Beskin

Inducción en la Geometría
de L. Golovina, I. Yaglom

Desigualdades
de P. Korovkin

Números complejos
y representaciones conformes
de A. Markushévich

Método de Montecarlo
de I. Sobol

Algebra extraordinaria
de I. Yaglom

Editorial MIR



Moscú